JOURNAL OF ALGEBRA 76, 327–336 (1982)

Über die Realisierbarkeit von Moduln durch Erweiterungsgruppen

RAINER SCHULZ

Mathematisches Institut der Universität München, München, Bundesrepublik Deutschland

Communicated by P. M. Cohn

Received December 16, 1980

FÜR FRIEDRICH KASCH ZUM SECHZIGSTEN GEBURTSTAG

Ein klassisches Problem in der Theorie der abelschen Gruppen ist die Frage nach der Realisierbarkeit einer abelschen Gruppe A durch eine Erweiterungsgruppe, das heißt die Frage nach der Existenz von abelschen Gruppen B und C, so daß A zu $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(B, C)$ isomorph ist. In der vorliegenden Arbeit lösen wir uns vom Grundring der ganzen Zahlen und behandeln eine naheliegende Variation des Realisierbarkeitsproblems, die wir nun beschreiben.

Sei C ein (Links-) Modul über einem Ring R und bezeichne D den Endomorphismenring von C. Mit einem beliebigen R-Modul L trägt die Erweiterungsgruppe $\mathrm{Ext}_R(C, L)$ eine D-Linksmodulstruktur, und wir fragen, zu welchem D-Modul Ω ein L derart existiert, daß ${}_D\Omega$ zu ${}_D\mathrm{Ext}_R(C, L)$ isomorph ist (Ext bedeute stets Ext^1).

Man erkennt sofort, daß diese Frage folgendermaßen einzuschränken ist. Die Gruppe $\mathrm{Ext}_R(C, L)$ wird von jedem Endomorphismus $d \in D$ annulliert, der sich über einen projektiven R-Modul faktorisieren läßt. Die Menge aller $d \in D$ mit dieser Eigenschaft bildet ein zweiseitiges Ideal $\mathrm{P}(C, C)$ von D. Der Modul Ω läßt sich also höchstens dann als $\mathrm{Ext}_R(C, L)$ realisieren, wenn $\mathrm{P}(C, C) \cdot \Omega$ null ist, das heißt, wenn Ω bereits ein Modul über dem Faktorring $\Delta = D/\mathrm{P}(C, C)$ ist.

Der folgende Satz von Auslander und Reiten beantwortet die Realisierbarkeitsfrage für gewisse Moduln C über einer Artin-Algebra R vollständig.

SATZ [3, Proposition 3.5]. *Sei R eine Artin-Algebra, und sei C ein endlich erzeugter R-Modul mit der Eigenschaft* $\mathrm{Ext}_R(C, R) = 0 = \mathrm{Ext}_R(C, C)$. *Dann gibt es zu jedem Δ-Modul Ω einen R-Modul L, so daß ${}_\Delta\Omega$ zu* ${}_\Delta\mathrm{Ext}_R(C, L)$ *isomorph ist.*

0021-8693/82/060327-10$02.00/0

Unser Hauptergebnis ist die Verallgemeinerung dieses Satzes auf beliebige Ringe. Wir skizzieren unser Vorgehen.

Wir zeigen zunächst, daß zu einem endlich präsentierten R-Modul C ein R-Modul A existiert, so daß die folgenden zwei Aussagen gelten, die später eine entscheidende Rolle bei der Lösung des Realisierbarkeitsproblems spielen:

SATZ 1(3). *${}_{\Delta}\mathrm{Ext}_R(C, A)$ ist ein injektiver Kogenerator.*

SATZ 2. *Für jeden R-Modul X ist die kanonische Abbildung von $\mathrm{Hom}_R(X, A)$ nach $\mathrm{Hom}_\Delta(\mathrm{Ext}_R(C, X), \mathrm{Ext}_R(C, A))$, die einem Homomorphismus g den Homomorphismus $\mathrm{Ext}(C, g)$ (=Fasersummenbildung mit g) zuordnet, surjektiv.*

Für eine Artin-Algebra R und einen endlich erzeugten R-Modul X ist Satz 2 in [3, Theorem 3.3] enthalten. Der dort geführte Beweis benutzt Methoden, die für Artin-Algebren typisch sind (Verwendung der Dualität, Einsatz von Längenargumenten), wir ersetzen ihn durch einen allgemeineren; für die spätere Anwendung von Satz 2 ist es wesentlich, daß wir dabei keine Endlichkeitsvoraussetzung für X benötigen.

Noch eine Bemerkung zur Wahl von A. Diese Wahl wird nahegelegt durch die Gestalt des linken Terms einer fast zerfallenden Folge (almost split sequence), siehe dazu [1]. Wir beweisen in diesem Zusammenhang folgenden Satz:

SATZ 4. *Gegeben seien R-Moduln A und C, deren Endomorphismenringe lokal sind. C sei nicht projektiv. Sei ${}_{\Delta}\mathrm{Ext}_R(C, A)$ ein minimaler injektiver Kogenerator, und sei für jeden R-Modul X die Abbildung $\mathrm{Hom}_R(X, A) \ni g \mapsto \mathrm{Ext}(C, g) \in \mathrm{Hom}_\Delta(\mathrm{Ext}_R(C, X), \mathrm{Ext}_R(C, A))$ surjektiv. Dann ist jedes erzeugende Element des Sockels von ${}_{\Delta}\mathrm{Ext}_R(C, A)$ eine fast zerfallende Folge.*

Aus den Sätzen 1(3) und 2 lesen wir ab, daß für einen endlich präsentierten R-Modul C mit lokalem Endomorphismenring bei geeigneter Wahl von A die Voraussetzungen von Satz 4 erfüllt sind. Als Anwendung erhalten wir damit einen elementaren und rein modultheoretischen Beweis von Auslanders Existenzsatz über fast zerfallende Folgen (siehe [1]).

In Satz 6 beweisen wir unsere Verallgemeinerung des oben zitierten Realisierbarkeitssatzes von Auslander und Reiten.

In Beispiel 9 geben wir eine große Klasse endlich präsentierter R-Moduln C an, die der Bedingung $\mathrm{Ext}_R(C, R) = 0 = \mathrm{Ext}_R(C, C)$ genügen. Es wird sich auch zeigen, daß in der Rolle von Δ jeder Endomorphismenring eines endlich erzeugten Θ-Moduls M auftritt, dessen Θ-Duales M^* null ist; der Ring Θ ist dabei beliebig.

Sei nun $P_1 \to^{d_1} P_0 \to^{d_0} C \to 0$ eine fest gewählte endlich erzeugte projektive Auflösung von C. Dann wird der transponierte Modul von C, der R-Rechtsmodul $\operatorname{Tr} C$, definiert als Kokern von d_1^* ($*$ bedeutet Dualisierung bezüglich R), man hat also eine exakte Folge $P_0^* \to^{d_1^*} P_1^* \to^{k} \operatorname{Tr} C \to 0$ mit dem kanonischen Epimorphismus k. Einzelheiten über die "Auslander–Bridger-Dualität" Tr findet man in [1], [2] oder [3], wir benutzen hier nur noch die Tatsache, daß ein Ringisomorphismus

$$\Delta = D/\mathrm{P}(C, C) \ni \bar{d} \mapsto \overline{\operatorname{Tr} d} \in T/\mathrm{P}(\operatorname{Tr} C, \operatorname{Tr} C)$$

existiert, wobei T den Endomorphismenring von $\operatorname{Tr} C$ bezeichnet; wir fassen diesen Isomorphismus als Identifikation auf. Wir schreiben Homomorphismen von Linksmoduln rechts vom Argument; die Verknüpfung fg bedeutet dann, daß zuerst f und anschließend g anzuwenden ist. Rechtsmodulhomomorphismen werden wie üblich verwendet.

Seien E ein injektiver T-Modul, ${}_RA = \operatorname{Hom}_T({}_T\operatorname{Tr} C_R, {}_TE)$ und $G = \operatorname{End}({}_RA)$. Die Komposition der kanonischen Isomorphismen $\operatorname{Hom}_T(E, E) \cong \operatorname{Hom}_T(\operatorname{Tr} C \otimes_R \operatorname{Hom}_T(\operatorname{Tr} C, E), E) \cong \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Hom}_T(\operatorname{Tr} C, E), \operatorname{Hom}_T(\operatorname{Tr} C, E)) = \operatorname{Hom}_R(A, A)$ liefert den Ringisomorphismus

$$\lambda : \operatorname{End}({}_TE) \ni s \mapsto \operatorname{Hom}(\operatorname{Tr} C, s) \in G,$$

der den Modul E zu einem $T - G -$ Bimodul macht.

SATZ 1. *Seien C ein endlich präsentierter R-Modul, $T = \operatorname{End}(\operatorname{Tr} C_R)$, ${}_TE$ injektiv und $A = \operatorname{Hom}_T(\operatorname{Tr} C, E)$. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Abbildung $\sigma: \operatorname{Ext}_R(C, A) \to E$,*

$$\sigma(0 \to \operatorname{Hom}_T(\operatorname{Tr} C, E) \to M \to C \to 0) = \sum_{i=1}^{n} (k(\psi_i))((p_i)\, c),$$

ist ein Monomorphismus von $T - G -$ Bimoduln. Dabei ist $(\psi_i, p_i)_{i=1,\ldots,n}$ eine Dualbasis von P_1 und c ist gegeben durch die Fortsetzung von $\operatorname{id}(C)$ in dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "c"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_T(\operatorname{Tr} C, E) \arrow[r] & M \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

σ ist unabhängig von der Wahl von c.

(2) $\operatorname{Bi}(\sigma) = \operatorname{Ann}_E(P(\operatorname{Tr} C, \operatorname{Tr} C))$, *das ist der Annullator von* $\mathrm{P}(\operatorname{Tr} C, \operatorname{Tr} C)$ *in E.*

(3) ${}_\Delta\operatorname{Ext}_R(C, A)$ *ist injektiv. Falls ${}_TE$ ein injektiver Kogenerator ist, so ist ${}_\Delta\operatorname{Ext}_R(C, A)$ ein injektiver Kogenerator. Falls C einen lokalen*

Endomorphismenring besitzt und nicht projektiv ist, und falls ${}_{T}E$ *injektive Hülle des einfachen T-Moduls ist, der von* $\mathrm{P}(\mathrm{Tr}\, C, \mathrm{Tr}\, C)$ *annulliert wird, so ist* ${}_{\Delta}\mathrm{Ext}_R(C, A)$ *ein minimaler injektiver Kogenerator.*

Beweis. Man hat nachzurechnen, daß σ die Komposition der folgenden kanonischen Isomorphismen ist, von denen jeder $T - G$ – linear ist:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ext}_R(C, \mathrm{Hom}_T(\mathrm{Tr}\, C, E)) \\ &\quad\cong \mathrm{Hom}_T(\mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{Tr}\, C, C), E) \\ &\quad\cong \mathrm{Hom}_T(T/\mathrm{P}(\mathrm{Tr}\, C, \mathrm{Tr}\, C), E) \\ &\quad\cong \mathrm{Ann}_E(\mathrm{P}(\mathrm{Tr}\, C, \mathrm{Tr}\, C)) \\ &\quad\subset E. \end{aligned}$$

(Den zweiten Isomorphismus erhält man mit dem $\Delta - \Delta$ – Isomorphismus $\mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{Tr}\, C, C) \cong \Delta$, siehe dazu [1, Proposition 3.2; 3, Proposition 2.2].) Damit folgen alle weiteren Behauptungen.

SATZ 2. *Seien C, T, E und A wie in Satz 1 erklärt. Sei X ein beliebiger R-Modul. Dann ist die Abbildung*

$$\mathrm{Ext}(C, -) : \mathrm{Hom}_R(X, A) \ni g \mapsto \mathrm{Ext}(C, g) \in \mathrm{Hom}_\Delta(\mathrm{Ext}_R(C, X), \mathrm{Ext}_R(C, A))$$

ein Epimorphismus von G-Rechtsmoduln.

Für den Beweis benötigen wir einen Hilfssatz.

HILFSSATZ 3. *Die Abbildung* $\tau : \mathrm{Ext}_R(C, X) \to \mathrm{Tr}\, C \otimes_R X$, $\tau(0 \to X \to M \to C \to 0) = \sum_{i=1}^{n} k(\psi_i) \otimes (p_i)\, d_1' h$, *ist ein Monomorphismus von T-Linksmoduln. Dabei ist* $(\psi_i, p_i)_{i=1,\dots,n}$ *eine Dualbasis von* P_1, *h ist gegeben durch*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_0 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r] & M \arrow[r] & C \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

und d_1' *ist die Abbildung* $P_1 \ni p \mapsto d_1(p) \in K_0$.

Beweis. In dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
P_0^* \otimes_R X \arrow[r, "d_1^* \otimes X"] & P_1^* \otimes_R X \arrow[r, "k \otimes X"] & \mathrm{Tr}\, C \otimes_R X \arrow[r] & 0 \\
 & \mathrm{Hom}_R(P_1, X) \arrow[u, "a_1"] & & \\
\mathrm{Hom}_R(P_0, X) \arrow[uu, "a_0"] \arrow[r, "\mathrm{Hom}(i,X)"] & \mathrm{Hom}_R(K_0, X) \arrow[u, "\mathrm{Hom}(d_1',X)"] \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{Ext}_R(C, X) \arrow[uu, "\tau"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

sei die obere Zeile das Tensorprodukt der Folge $P_0^* \to^{d_1^*} P_1^* \to^k \mathrm{Tr}\, C \to 0$ mit X, die untere Zeile sei ein Teil der langen exakten Folge von Ext (mit dem verbindenden Homomorphismus δ), und a_0, a_1 seien die kanonischen Isomorphismen. Da $\mathrm{Hom}(d_1', X)$ injektiv ist, wird die von a_0 und $\mathrm{Hom}(d_1', X)\ a_1$ induzierte Abbildung τ ebenfalls injektiv. Man kann nachrechnen, daß τ von der angegebenen Form und T-linear ist.

Beweis. von Satz 2. Wir bemerken zuerst, daß die Abbildung $\mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}_R(C, X), \sigma)$ ein Isomorphismus von G-Rechtsmoduln ist (σ wie in Satz 1). Das folgt aus der Tatsache, daß das Bild eines jeden T-Homomorphismus von $\mathrm{Ext}_R(C, X)$ nach E von P(Tr C, Tr C) annulliert wird, also in $\sigma(\mathrm{Ext}_R(C, A)$ liegt. Wir zeigen jetzt die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(X, A) = \mathrm{Hom}_R(X, \mathrm{Hom}_T(\mathrm{Tr}\, C, E)) \arrow[r, "\mathrm{adj}"] \arrow[d, "\mathrm{Ext}(C,-)"'] & \mathrm{Hom}_T(\mathrm{Tr}\, C \otimes_R X, E) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\tau, E)"'] \\
\mathrm{Hom}_T(\mathrm{Ext}_R(C, X), \mathrm{Ext}_R(C, A)) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(\mathrm{id}, \sigma)"] & \mathrm{Hom}_T(\mathrm{Ext}_R(C, X), E),
\end{tikzcd}$$

darin sei τ wie in Hilfssatz 3 erklärt.

Man berechnet für $g \in \mathrm{Hom}_R(X, A)$ und $(0 \to X \to M \to C \to 0) \in \mathrm{Ext}_R(C, X)$:

$$(\sigma\, \mathrm{Ext}(C, -))(g)(0 \to X \to M \to C \to 0) = \sum_{i=1}^{n} (k(\psi_i))(p_i)\, c),$$

wobei

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "g"] & M \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & N \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd}
 & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "c"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & N \arrow[r] & C \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Andererseits ist $(\mathrm{Hom}(\tau, E)\,\mathrm{adj})(g)(0 \to X \to M \to C \to 0) = \sum_{i=1}^{n} (k(\psi_i))((p_i)\, d_1' hg)$, wobei

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & M \arrow[r] & C \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Aus dem Diagram

$$\begin{tikzcd}
 & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "d_1'"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, equal] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_0 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "g"] & M \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & N \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

läßt sich ablesen, daß $c = d_1' hg$ gewählt werden kann. Da die G-Linearität von $\mathrm{Ext}(C, -)$ klar ist, folgt daraus Satz 2.

An dieser Stelle soll ein Zusammenhang der Sätze 1(3) und 2 mit dem Begriff der fast zerfallenden Folge (almost split sequence, siehe z. B. [3] oder [1]) diskutiert werden. Eine nicht zerfallende exakte Folge von R-Moduln $0 \to A \to^{\alpha} B \to^{\beta} C \to 0$ heißt fast zerfallend, wenn jeder in A startende R-Homomorphismus, der nicht ein zerfallender Monomorphismus ist, über α faktorisiert werden kann, und wenn die duale Aussage für β ebenfalls gilt. Fast zerfallende Folgen haben sich in den letzten Jahren als äußerst nützliches Hilfsmittel in der Darstellungstheorie von Artin-Algebren und von artinschen Ringen erwiesen. Wir geben jetzt einen Existenzsatz über fast erfallende Folgen an.

SATZ 4. *Gegeben seien R-Moduln A und C, deren Endomorphismenringe G und D lokal sind. C sei nicht projektiv. Sei* ${}_{\Delta}\mathrm{Ext}_R(C,A)$ *ein minimaler injektiver Kogenerator, und sei für jeden R-Modul X die Abbildung* $\mathrm{Ext}(C,-)\colon \mathrm{Hom}_R(X,A) \ni g \mapsto \mathrm{Ext}(C,g) \in \mathrm{Hom}_{\Delta}(\mathrm{Ext}_R(C,X), \quad \mathrm{Ext}_R(C,A))$ *surjektiv. Dann ist jedes erzeugende Element* (α,β) *des Sockels von* ${}_{\Delta}\mathrm{Ext}_R(C,A)$ *eine fast zerfallende Folge.*

Beweis. Angenommen, $g \in \mathrm{Hom}_R(A,X)$ läßt sich nicht über α faktorisieren, das bedeutet $(\alpha,\beta)g \neq 0$. Wir müssen zeigen, daß g ein zerfallender Monomorphismus ist.

Wegen $(\alpha,\beta)\,\mathrm{Ext}(C,g) = (\alpha,\beta)g \neq 0$ ist die Einschränkung von $\mathrm{Ext}(C,g)$ auf den einfachen Sockel von ${}_{\Delta}\mathrm{Ext}(C,A)$ ein Monomorphismus. Nach Voraussetzung ist $\mathrm{So}({}_{\Delta}\mathrm{Ext}_R(C,A))$ ein großer Untermodul des injektiven Moduls ${}_{\Delta}\mathrm{Ext}_R(C,A)$. Daher ist $\mathrm{Ext}(C,g)$ ein zerfallender Monomorphismus, und es existiert $\phi \in \mathrm{Hom}_{\Delta}(\mathrm{Ext}_R(C,X), \mathrm{Ext}_R(C,A))$, so daß $\mathrm{Ext}(C,g)\,\phi$ die identische Abbildung ist. Wegen der Surjektivität von $\mathrm{Ext}(C,-)$ wird ϕ induziert von einem $g' \in \mathrm{Hom}_R(X,A)$, und man erhält die Gleichung $\mathrm{Ext}(C,gg') = \mathrm{id}(\mathrm{Ext}_R(C,A))$.

Bekanntlich ist der Sockel eines injektiven Moduls enthalten im Sockel dieses Moduls über seinem Endomorphismenring (siehe [4, Hilfssatz 12.3.2]). Zusammen mit dem surjektiven Ringhomomorphismus $G \ni s \mapsto \mathrm{Ext}(C,\, s) \in \mathrm{End}({}_{\Delta}\mathrm{Ext}_R(C,\, A))$ liefert diese Aussage die Inklusion $\mathrm{So}({}_{\Delta}\mathrm{Ext}_R(C,A)) \subset \mathrm{So}(\mathrm{Ext}_R(C,A)_G)$.

Läge gg' im Radikal von G, so folgte insbesondere $(\alpha,\beta)gg' = 0$, ein Widerspruch. Daher ist gg' ein Isomorphismus, g ist ein zerfallender Monomorphismus, und (α,β) ist links fast zerfallend. Der folgende bekannte Schluß zeigt, daß (α,β) auch rechts fast zerfallend ist, wir führen ihn vollständigkeitshalber durch. Der Homomorphismus $d \in \mathrm{Hom}_R(Z,\, C)$ besitze keine Faktorisierung über β. Dann ist $(\alpha_1,\beta_1) := d(\alpha,\beta) \neq 0$, und es existiert ein Homomorphismus d_1, so daß $\alpha d_1 = \alpha_1$ gilt. Sei d' von d_1 induziert. Dann ist $0 \neq (\alpha,\beta) = d'd(\alpha,\beta)$, also $d'd$ nicht in $\mathrm{Ra}(D)$ enthalten, und d ist ein zerfallender Epimorphismus.

Als Anwendung von Satz 4 betrachten wir den Fall, daß C ein nichtprojektiver endlich präsentierter R-Modul mit lokalem Endomorphismenring ist. Sei $T = \mathrm{End}(\mathrm{Tr}\, C_R)$, und sei ${}_TE$ eine injektive Hülle des einfachen T-Moduls, der von $\mathrm{P}(\mathrm{Tr}\, C,\ \mathrm{Tr}\, C)$ annulliert wird. Sei $A = \mathrm{Hom}_T(\mathrm{Tr}\, C, E)$. Aus den Sätzen 1(3) und 2 folgt, daß damit die Voraussetzungen von Satz 4 erfüllt sind. Wir erhalten als Folgerung:

FOLGERUNG 5. *Ist C ein nichtprojektiver endlich präsentierter R-Modul mit lokalem Endomorphismenring, so existiert eine fast zerfallende Folge* $0 \to \mathrm{Hom}_T(\mathrm{Tr}\, C, E) \to B \to C \to 0$.

Wir wenden uns nun unserer Ausgangsfrage nach der Realisierbarkeit von

Δ-Moduln durch Erweiterungsgruppen zu und formulieren unseren Hauptsatz. Die Sätze 1(3) und 2 werden sich als entscheidende Hilfsmittel erweisen. Da wir in Satz 2 keine Endlichkeitsbedingung an X zu stellen brauchten, können wir den Beweis von [3, Proposition 3.5] mit wenig Mühe abändern und für unsere allgemeinere Situation übernehmen.

SATZ 6. *Sei C ein endlich präsentierter R-Modul. Sei A wie in Satz 1 erklärt.*

(1) *Ist* $\mathrm{Ext}_R(C,R)=0$, *so existiert ein R-Modul L derart, daß* ${}_\Delta\mathrm{Ext}_R(C,L)$ *ein Generator ist.*

Falls außerdem ${}_RR$ und ${}_RA$ noethersch sowie ${}_\Delta\Delta$ und ${}_\Delta\mathrm{Ext}_R(C,A)$ *artinsch sind, kann L endlich erzeugt gewählt werden.*

(2) *Ist* $\mathrm{Ext}_R(C,R)=0=\mathrm{Ext}_R(C,C)$, *so gibt es zu jedem Δ-Modul Ω einen R-Modul L, so daß ${}_\Delta\Omega$ zu* ${}_\Delta\mathrm{Ext}_R(C,L)$ *isomorph ist. Seien außerdem ${}_RR$, ${}_RA$ und ${}_RC$ noethersch sowie ${}_\Delta\Delta$,* ${}_\Delta\mathrm{Ext}_R(C,A)$ *und* ${}_D\mathrm{Hom}_R(C,A)$ *artinsch. Dann kann L endlich erzeugt gewählt werden, wenn Ω endlich erzeugt ist.*

Beweis. (1) Nach Satz 1(3) existiert eine Auflösung

$$0\to\Delta\to\mathrm{Ext}_R(C,A^I)\xrightarrow{\xi}\mathrm{Ext}_R(C,A)^J.$$

Nach Satz 2 ist die Abbildung $\mathrm{Ext}(C,-)$: $\mathrm{Hom}_R(A^I,A)\to\mathrm{Hom}_\Delta(\mathrm{Ext}_R(C,A^I),\mathrm{Ext}_R(C,A))$ surjektiv, folglich existiert $h\in\mathrm{Hom}_R(A^I,A^J)$ mit $\mathrm{Ext}(C,-)^J(h)=\xi$. Sei $P\to^l A^J\to 0$ eine projektive Erweiterung von A^J, und sei der R-Modul L so gewählt, daß

$$0\to L\xrightarrow{i}P\amalg A^I\xrightarrow{(l,h)}A^J\to 0$$

exakt ist. Dann ist

$$\mathrm{Ext}_R(C,L)\xrightarrow{\mathrm{Ext}(C,i)}\mathrm{Ext}_R(C,P\amalg A^I)\xrightarrow{\mathrm{Ext}(C,(l,\,h))}\mathrm{Ext}_R(C,A^J)$$

exakt. Wegen $\mathrm{Ext}_R(C,R)=0$ und C endlich präsentiert ist auch $\mathrm{Ext}_R(C,P)=0$, folglich ist

$$\mathrm{Ext}_R(C,L)\xrightarrow{\mathrm{Ext}(C,\,i)}\mathrm{Ext}_R(C,A^I)\xrightarrow{\mathrm{Ext}(C,\,h)}\mathrm{Ext}_R(C,A^J)$$

exakt. Ein Vergleich mit der zu Beginn des Beweises gewählten Auflösung von Δ liefert einen Epimorphismus von $\mathrm{Ext}_R(C,L)$ auf Δ, daher ist ${}_\Delta\mathrm{Ext}_R(C,L)$ ein Generator.

Der Zusatz in (1) folgt aus der Konstruktion von L.

(2) Zu gegebenem Δ-Modul Ω wähle man eine Auflösung

$$0 \to \Omega \to \mathrm{Ext}_R(C, A^I) \to \mathrm{Ext}_R(C, A)^J.$$

Seien l und h wie in (1) definiert.

Sei H ein Erzeugendensystem von ${}_D\mathrm{Hom}_R(C, A^J)$ und sei $g \in \mathrm{Hom}_R(C^{(H)}, A^J)$ definiert durch $g((c_h)_{h \in H}) = \sum_{h \in H, c_h \neq 0} (c_h)\, h$. Sei $L = \mathrm{Ke}(g, l, h)$, dann hat man eine exakte Folge

$$0 \to L \xrightarrow{i} C^{(H)} \amalg P \amalg A^I \xrightarrow{(g, l, h)} A^J \to 0.$$

Nach Konstruktion von g ist $\mathrm{Hom}(C, (g, l, h))$ surjektiv, daher erhält man eine exakte Folge

$$0 \to \mathrm{Ext}_R(C, L) \xrightarrow{\mathrm{Ext}(C, i)} \mathrm{Ext}_R(C, C^{(H)} \amalg P \amalg A^I) \xrightarrow{\mathrm{Ext}(C, (g, l, h))} \mathrm{Ext}_R(C, A^J),$$

in der nach Voraussetzung $C^{(H)} \amalg P$ gestrichen und $\mathrm{Ext}(C, (g, l, h))$ durch $\mathrm{Ext}(C, h)$ ersetzt werden können. Ein Vergleich mit der oben gewählten Auflösung von Ω liefert einen Isomorphismus ${}_\Delta\Omega \cong {}_\Delta\mathrm{Ext}_R(C, L)$, was zu zeigen war. Der Zusatz in (2) folgt wieder aus der Konstruktion von L.

FOLGERUNG 7. *Seien C und A wie in Satz* 6. *Seien ${}_RR$, ${}_RA$ und ${}_RC$ noethersch sowie ${}_\Delta\Delta$, ${}_\Delta\mathrm{Ext}_R(C, A)$ und ${}_D\mathrm{Hom}_R(C, A)$ artinsch. Sei* $\mathrm{Ext}_R(C, R) = 0 = \mathrm{Ext}_R(C, C)$. *Dann ist die Kardinalität der Menge der Isomorphieklassen unzerlegbarer endlich erzeugter Δ-Linksmoduln höchstens so groß wie die der unzerlegbaren endlich erzeugten R-Linksmoduln.*

FOLGERUNG 8. *Sei R ein Ring vom endlichen Modultyp, und sei C ein endlich erzeugter R-Modul mit der Eigenschaft* $\mathrm{Ext}_R(C, R) = 0 = \mathrm{Ext}_R(C, C)$. *Dann ist Δ ein Ring vom endlichen Modultyp.*

Im Hinblick auf Satz 6 ist die Frage von Interesse, welche endlich präsentierten R-Moduln C die Bedingung $\mathrm{Ext}_R(C, R) = 0 = \mathrm{Ext}_R(C, C)$ erfüllen, und welche Ringe in der Rolle von $\Delta = \mathrm{End}({}_RC)/P(C, C)$ auftreten. Dazu geben wir hier ein Beispiel an.

BEISPIEL 9. *Seien Θ ein beliebiger Ring und M ein endlich erzeugter Θ-Modul mit der Eigenschaft* $M^* = \mathrm{Hom}_\Theta(M, \Theta) = 0$. *Sei* $S = \mathrm{End}({}_\Theta M)$. *Wir* *definieren* $R = \begin{pmatrix} \Theta & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ *und* ${}_RC = \begin{pmatrix} \Theta & M \\ 0 & S \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} \Theta & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Dann gelten folgende Aussagen*:

(1) *C ist endlich präsentiert.*

(2) $\mathrm{Ext}_R(C, R) = 0 = \mathrm{Ext}_R(C, C)$.

(3) $\mathrm{End}({}_RC) \cong S$ *und* $\mathrm{P}(C, C) = 0$.

Beweis. (1) folgt unmittelbar aus der Definition von C.

(2) Wir beginnen mit einer Vorbemerkung. Wir betrachten die exakte Folge $0 \to K \to^{\iota} R \to^{\nu} C \to 0$ mit $K = \begin{pmatrix} \Theta & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Für einen R-Modul N gilt genau dann die Gleichung $\mathrm{Ext}_R(C, N) = 0$, wenn sich jeder R-Homomorphismus von K nach N über ι faktorisieren läßt. Wir weisen jetzt diese Eigenschaft für $N = C$ und für $N = R$ nach.

Sei zunächst $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(K, C)$. Dann gilt $\begin{pmatrix} \Theta & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Theta & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha \subset \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C = 0$, also $\alpha = 0$, und die Faktorisierbarkeit von α über ι folgt trivial.

Sei jetzt $\beta \in \mathrm{Hom}_R(K, R)$. Dann ist β zusammengesetzt aus $\beta_1 \in \mathrm{Hom}_R(\begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Theta & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$ und $\beta_2 \in \mathrm{Hom}_R(\begin{pmatrix} \Theta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Theta & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$. β_1 ist gegeben durch Rechtsmultiplikation mit geeignetem $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \in R$ (das zeigt man wie in [5, Theorem 3.1]; dabei geht die Eigenschaft $M^* = 0$ ein). β_2 ist durch das Bild von $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ festgelegt und ist daher durch Rechtsmultiplikation mit einem gewissen $\begin{pmatrix} a & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ gegeben. Daraus folgt (2).

(3) Die Eigenschaft $S \cong \mathrm{End}({}_RC)$ folgt sofort aus der Tatsache, daß K ein zweiseitiges Ideal in R ist. Es genügt jetzt zu zeigen, daß $\mathrm{Hom}_R(C, R) = 0$ gilt, dann folgt $\mathrm{P}(C, C) = 0$. Für $\gamma \in \mathrm{Hom}_R(C, R)$ gilt $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & s \end{pmatrix} \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & s \end{pmatrix} \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & m \\ 0 & \tilde{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{s} \end{pmatrix}$ mit $\tilde{s} \in S$, und daher $0 = \begin{pmatrix} \Theta & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & s \end{pmatrix} \gamma = \begin{pmatrix} \Theta & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & M\tilde{s} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, also $\tilde{s} = 0$.

LITERATUR

1. M. AUSLANDER, Functors and morphisms determined by objects, Representation theory of algebras, *in* "Proceedings, Philadelphia Conference," Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 37, Dekker, New York/Basel, 1976.
2. M. AUSLANDER UND I. BRIDGER, Stable module theory, *Mem. Amer. Math. Soc.*, No. 94 (1969).
3. M. AUSLANDER UND I. REITEN, Representation theory of Artin Algebras III, *Comm. Algebra* **3** (1975), 239–294.
4. F. KASCH, "Moduln und Ringe," Teubner, Stuttgart, 1977.
5. R. SCHULZ, Reflexive modules over perfect rings, *J. Algebra* **61**(1979), 527–537.